УДК 621.038

# ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАВНОВЕСНЫХ КОДОВ В БИНОМИАЛЬНЫЕ

***В. Б. Чередниченко, ст. преподаватель***
*Филиал Национального университета внутренних дел в г. Сумах*

В ряде практических случаев существует задача повышения скорости передачи равновесных кодов путем их нумерации. Для ее решения целесообразно использовать биномиальные коды, которые можно получить из равновесных кодов. Ранее [1] было предложено осуществлять преобразование равновесных кодов в их номера в два этапа: сначала переход от равновесных кодов к биномиальным и затем от биномиальных кодов к их двоичным номерам. В [1] были описаны соответствующие алгоритмы, однако до настоящего времени не решена задача оценки скорости каждого из этих преобразований.

Равновесные коды с параметрами $n$, k имеют одинаковую длину $r_p = n$, и равное количество единиц $k$ в каждой комбинации, а также отвечают условиям

$$n > k, \qquad (1)$$

$$k \geq 1. \qquad 2)$$

Биномиальные кодовые комбинации с теми же параметрами n и k имеют различную длину $r_i \leq n-1$, а кодообразующие правила и ограничения для них описаны в [2].

Проанализируем время работы алгоритма получения биномиальных кодов из равновесных, при котором в каждой равновесной кодовой комбинации отбрасываются единицы справа до первого нуля или же отбрасываются нули справа до первой единицы. Разность между длиной каждой равновесной и соответствующей ей биномиальной кодовой комбинации будет составлять число тактов (или время) преобразования одной кодовой посылки. Для оценки усредненного времени преобразования, когда с равной вероятностью используются все кодовые комбинации, входящие в код с параметрами $n$ и $k$, в данной работе исследуется средняя длина биномиальных кодовых комбинаций $r_{cp}$, которая определяется как сумма длин всех биномиальных кодовых комбинаций $r_i$ (i = 1, 2,…i,...N), деленная на общее количество кодовых комбинаций N = $C_n^k$:

$$r_{cp} = \sum_{i=1}^{N} r_i \,/\mathrm{N}. \qquad (3)$$

Тогда искомое время работы алгоритма перехода от равновесного кода к биномиальному будет определяться средним количеством тактов такого преобразования $r_{рб}$:

$$r_{рб} = r_p - r_{cp} = n - \sum_{i=1}^{N} r_i \,/\mathrm{N}. \qquad (4)$$

В работе [3] получена формула, позволяющая вычислить среднюю длину биномиальных кодовых комбинаций $r_{cp}$ в зависимости от параметров кода:

$$r_{cp} = \frac{k(n-k)(n+2)}{(k+1)(n-k+1)}. \qquad (5)$$

Поскольку рассматриваемые коды состоят из нулей и единиц, то количество таковых может быть только целым, т. е. параметры $n$ и $k$ являются целочисленными. Установим область определения функции $r_{cp}$. Исходя из (2) делаем вывод

$$k_{min} = 1, \qquad (6)$$

а из (1) следует:

$$n_{min} = 2, \qquad (7)$$

$$k_{max} = n - 1. \tag{8}$$

Максимальная величина параметра $n_{max}$ математических ограничений не имеет.

Средняя длина биномиальных кодовых комбинаций $r_{ср}$ (5) является непрерывной функцией, так как при выполнении условий (1), (2) она определена при всех значениях $n$ и $k$, ограниченных (6) – (8).

Проанализируем наличие экстремумов функции $r_{cp}$ (5), для чего вычислим ее первую производную по $k$ при фиксированном n, и приравняем ее к нулю

$$\frac{dr_{cp}}{dk} = \frac{(n+1)(n+2)(n-2k)}{(k+1)^2(n-k+1)^2} = 0. \tag{9}$$

Из (9) следует вывод, что первая производная обращается в нуль при

$$k = n/2. \tag{10}$$

Следовательно, функция $r_{ср}$ имеет экстремум в точке $k = n/2$.

Чтобы определить, является ли найденная экстремальная точка максимумом или минимумом, возьмем производную из (9). Если она в точке $k = n/2$ отрицательна, то здесь имеет место максимум, а если она положительна, значит это минимум.

$$\frac{d^2r_{cp}}{dk^2} = -2(n+1)(n+2)\frac{(n^2+3nk+3k^2+n+1)}{(k+1)^3(n-k+1)^3}. \tag{11}$$

Подставляем в (11) значение $k = n/2$. Тогда

$$\frac{d^2r_{cp}}{dk^2}\Big|_{k=n/2} = -- 1/2(n^2 + 4n + 4). \tag{12}$$

Вторая производная при всех допустимых значениях $n$ будет отрицательна, следовательно, в точке $k = n/2$ функция имеет один максимум.

Как было сказано выше, $n$ и $k$ являются целыми числами, следовательно, утверждение о максимуме функции (5) при $k = n/2$ справедливо для четных значений $n$, поскольку при нечетности $n$ величина $n/2$ будет дробной, а не целочисленной. Например, при $n$ =7, $k = n/2 = 3,5$, тогда ближайшими целыми числами будут $k_{max1} = n/2 + +1/2$, $k_{max2} = n/2 - 1/2$. Очевидно, что при нечетном параметре n средняя длина биномиальных кодовых комбинаций $r_{cp}$ (5) имеет две одинаковых точки максимальной величины при значениях $k_{max1} = n/2 + 1/2$ и $k_{max2} = n/2 - 1/2$. Действительно, при подстановке в (5) нечетных значений $k_{max1}$ и $k_{max2}$ получается одинаковый результат

$$r_{cp}^{\max}\Big|_{\text{нечет}} = \frac{(n^2-1)(n+2)}{n^2+4n+3}. \tag{13}$$

Поскольку функция $r_{ср}$ (5) непрерывна в заданной области определения и имеет один максимум при величине $k = n/2$, то своего минимума она достигает при крайних значениях $k = 1$ и $k = n - 1$. Действительно, подставляя в (5) $k = 1$ и $k = n - 1$, в обоих случаях получим

$$r_{cp}^{\min} = r_{cp}^{k=1} = r_{cp}^{k=n-1} = \frac{n^2+n-2}{2n}. \tag{14}$$

В качестве примера выполнены расчеты средней длины биномиальных чисел $r_{ср}$ по формуле (5) для различных значений n и k внутри области их определения. Результаты приведены в таблице 1, а соответствующие им графики представлены на рис. 1. Полученные данные свидетельствуют о правильности сделанных выше утверждений.

*Таблица 1 – Средняя длина биномиальных чисел $r_{cp}$ в зависимости от параметров n и k*

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1,0 | | | | | | | | | | |
| 3 | 1,7 | 1,7 | | | | | | | | | |
| 4 | 2,3 | 2,7 | 2,3 | | | | | | | | |
| 5 | 2,8 | 3,5 | 3,5 | 2,8 | | | | | | | |
| 6 | 3,3 | 4,3 | 4,5 | 4,3 | 3,3 | | | | | | |
| 7 | 3,9 | 5,0 | 5,4 | 5,4 | 5,0 | 3,9 | | | | | |
| 8 | 4,4 | 5,7 | 6,3 | 6,4 | 6,3 | 5,7 | 4,4 | | | | |
| 10 | 5,4 | 7,1 | 7,9 | 8,2 | 8,3 | 8,2 | 7,9 | 7,1 | 5,4 | | |
| 12 | 6,4 | 8,5 | 9,5 | 10,0 | 10,2 | 10,3 | 10,2 | 10,0 | 9,5 | 8,5 | |
| 16 | 8,4 | 11,2 | 12,5 | 13,3 | 13,8 | 14,0 | 14,2 | 14,2 | 14,2 | 14,0 | 13,8 |
| 20 | 10,5 | 13,9 | 15,6 | 16,6 | 17,2 | 17,6 | 17,9 | 18,05 | 18,15 | 18,18 | 18,15 |

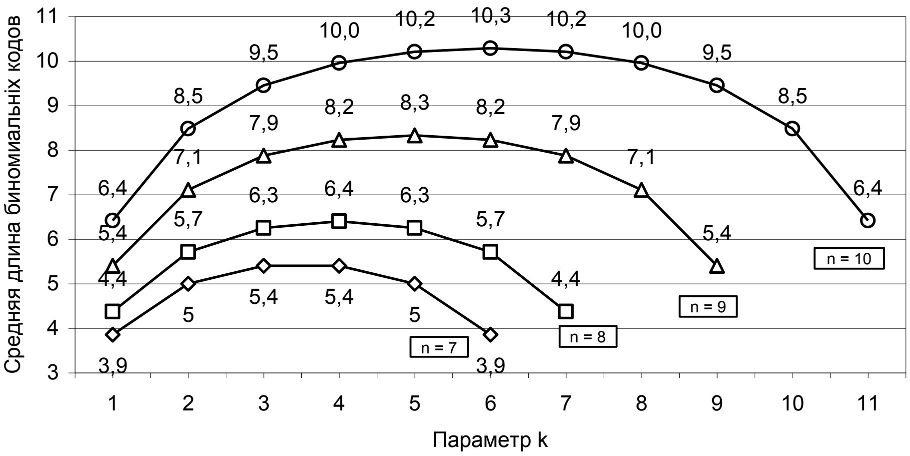


*Рисунок 1 - Средняя длина биномиальных чисел $r_{ср}$ в зависимости от параметров n и k*

Выполнены также расчеты среднего количества тактов преобразования равновесных чисел в биномиальные $r_{рб}$ по формуле (4) для тех же, что и выше значений *n* и *k*, результаты приведены в таблице 2, а соответствующие графики представлены на рис. 2:

*Таблица 2 – Среднее количество тактов преобразования $r_{рб}$ из равновесных кодов в биномиальные в зависимости от n и k*

| n \ k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1,0 | | | | | | | | | | |
| 3 | 1,3 | 1,3 | | | | | | | | | |
| 4 | 1,8 | 1,3 | 1,8 | | | | | | | | |
| 5 | 2,2 | 1,5 | 1,5 | 2,2 | | | | | | | |
| 6 | 2,7 | 1,7 | 1,5 | 1,7 | 2,7 | | | | | | |
| 7 | 3,1 | 2,0 | 1,6 | 1,6 | 2,0 | 3,1 | | | | | |
| 8 | 3,6 | 2,3 | 1,8 | 1,6 | 1,8 | 2,3 | 3,6 | | | | |
| 10 | 4,6 | 2,9 | 2,1 | 1,8 | 1,7 | 1,8 | 2,1 | 2,9 | 4,6 | | |
| 12 | 5,6 | 3,5 | 2,6 | 2,0 | 1,8 | 1,7 | 1,8 | 2,0 | 2,6 | 3,5 | 5,6 |
| 16 | 7,6 | 4,8 | 3,5 | 2,7 | 2,3 | 2,0 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 2,0 | 2,3 |
| 20 | 9,6 | 6,1 | 4,4 | 3,4 | 2,8 | 2,4 | 2,1 | 1,95 | 1,85 | 1,82 | 1,85 |

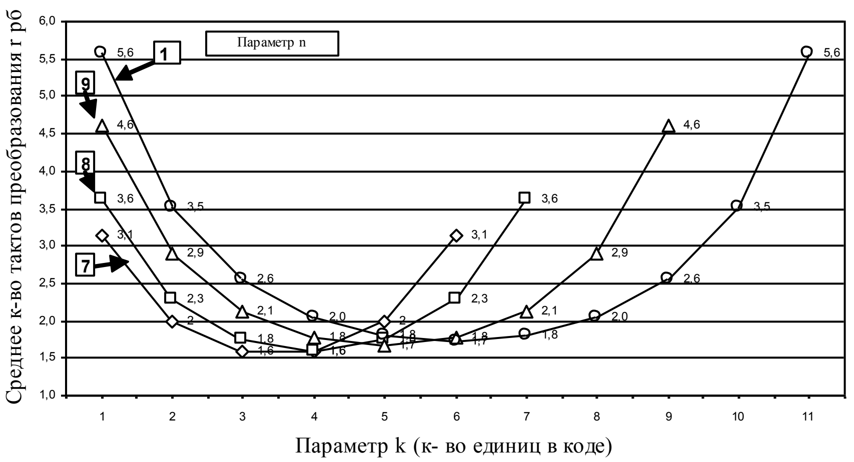


*Рисунок 2 – Среднее количество тактов преобразования равновесных кодов в биномиальные $r_{рб}$ при различных параметрах кодов n и k*

Минимальные значения среднего количества тактов преобразования $r_{рб}^{\min}$ будут наблюдаться при максимальной длине биномиальных чисел $r_{ср}^{\max}$, т. е. при значении $k = n/2$. Тогда, подставляя эту величину в (5), получим

$$r_{ср}^{\max} = n^2/(n+2). \tag{15}$$

Используя формулу (4), определим

$$r_{рб}^{\min} = n - r_{ср}^{\max}. \tag{16}$$

Среднее количество тактов преобразования равновесных кодов в биномиальные будет иметь максимум $r_{рб}^{\max}$ при минимальной длине биномиальных чисел $r_{ср}^{\min}$, которая уже была определена в (14). Тогда

$$r_{рб}^{\max} = n - r_{ср}^{\min}. \tag{17}$$

Проведены расчеты по формулам (16) и (17), их результаты представлены в таблице 3.

*Таблица 3 – Максимумы и минимумы среднего количество тактов преобразования $r_{рб}$ из равновесных кодов в биномиальные при различной длине кода n*

| n | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max преобр. рб | 3,6 | 7,6 | 15,5 | 31,5 | 63,5 | 127,5 | 255,5 | 511,5 |
| min преобр. рб | 1,6 | 1,8 | 1,9 | 1,9 | 2,0 | 2,0 | 2,0 | 2,0 |

## ВЫВОДЫ

Время преобразования равновесных кодов в биномиальные $r_{рб}$ определяется средней длиной биномиальных кодовых комбинаций $r_{ср}$, которая является функцией длины равновесных кодов n и количества единиц в них $k$. В работе установлено, что средняя длина биномиальных кодовых комбинаций в случаях четного n имеет один максимум при $k = n/2$, а в случаях нечетного $n$ – две одинаковых точки максимальной величины при $k = n/2 + 1/2$ и $k = n/2 - 1/2$. Два одинаковых минимума $r_{ср}$ наблюдаются при $k = 1$ и $k = n - 1$.

Среднее время преобразования равновесных кодов в биномиальные $r_{рб}$ минимально при максимальной средней длине биномиальных кодовых комбинаций, и оно максимально при их минимальной средней длине. Минимальное время преобразования стремится к двум тактам работы алгоритма преобразования, а максимальное – к $n/2$ тактам.

Полученные результаты позволяют оценивать скорость работы систем кодирования, в которых используется алгоритм преобразования равновесных кодов в биномиальные, что дает возможность применить их в практических задачах сжатия информации.

## SUMMARY

*The paper estimates the functioning time for transforming algorithm of equipond codes, in which uses methods of binary binomial count. The results are confirmed by computations, tables and graphics.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Борисенко, В. Б. Чередниченко. Нумерация равновесных кодов на основе биномиальных чисел // Право і безпека. - 2004. - №4.
2. Борисенко А. А Биномиальный счет. Теория и практика: Монография. – Сумы: ИТД «Университетская книга», 2004. – 170 с.
3. И. А. Кулик. О средней длине двоичных биномиальных чисел // Вісник СумДУ. - 2004.
4. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика // Пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. - 960 с.
5. Амелькин В. А. Методы нумерационного кодирования. – Новосибирск: Наука, 1986. – 155 с.
6. Борисенко А. А Введение в теорию биномиального счета: Монография. – Сумы: ИТД «Университетская книга», 2004. – 85 с.

*Поступила в редакцию 15 декабря 2004г.*